Tentamen i MSG110 Sannolikhetsteori, 7.5 högskolepoäng, Göteborgs Universitet.
Tid: Tisdagen den 28 Oktober 2014, kl. 8.30-12.30.
Examinator och Jour: Olle Nerman 7723565.
Hjälpmedel: Miniräknare, egen formelsamling (4 A4-sidor på 2 blad) och till skrivningen medhörande tabeller.
Betygsgränser: För betyget G fordras 12 poäng, för betyget VG 20 poäng.

---

1. Du har framför dig två urnor. Den till vänster innehåller 3 vita kulor och 2 svarta. Den till höger innehåller 1 vit kula och 5 svarta kulor. Du genomför två kopplade sannolikhetsförsök; först tar du en kula (med samma sannolikhet för varje möjligt val) ur urnan till vänster och lägger denna i den högra urnan istället. Därefter drar du en kula (med samma sannolikhet för varje möjligt val) ur den högra urnan. Låt A vara händelsen att kulan i dragningen från den vänstra urnan i steg 1 är vit och låt B vara händelsen att kulan i dragningen från den högra urnani steg 2 är vit.
   a. Beräkna den betingade sannolikheten $P(B|A)$. (1p)
   b. Beräkna $P(B)$. (1p)
   c. Beräkna den betingade sannolikheten $P(A|B)$. (2p)

2. Antag att X och Y är två oberoende normalfördelade stokastiska variabler med väntevärden lika med 5 respektive 15. Variansen för X är lika med 16 och Y har variansen 4.
   a. Vilket väntevärde har $Z= X-Y$? (1p)
   b. Vilken varians har Z definierad som i a-delen? (1p)
   c. Vilken fördelning har Z definierad som i a-delen? (1p)
   d. Vad är sannolikheten $P(X>Y)$? (1p)

3. Du utför en serie av oberoende försök och observerar huruvida en viss händelse A inträffar eller ej. Antalet försök som du behöver utföra för att händelsen skall inträffa 5 gånger är en stokastisk variabel Y. Sannolikheten för att A skall inträffa i en enskild försöksupprepning = p.
   a. Vilket utfallsrum har den stokastiska variabeln Y? (1p)
   b. Bestäm sannolikheten för händelsen $Y=5$ som funktion av parametern p. (1p)
   c. Bestäm sannolikheterna för händelserna $Y=k$ för alla k i utfallsrummet för Y. (1p)
   d. Bestäm Maximum Likelihood-skattningen av p baserad på observation av $y=23$. (2p)

4. Antag att X är binomialfördelad med antalsparameter $n=400$ och sannolikhetsparameter $p=0.5$.
   a. Beräkna väntevärdet och variansen av X. (2p)
   b. Beräkna ett approximativt värde på sannolikheten $P(X<180)$. Använd centrala gränsvärdessatsen och (för full poäng) använd halvtalskorrigering. (2p)

5. Fördelningsfunktionen F(x) för en diskret stokastisk variabel X antar värdena $F(x)=0$ för alla funktionsargument $x<-3$, $F(x)=0.4$ för alla x sådana att $-3\leq x<3$, $F(x)=0.5$ för alla x sådana att $3\leq x<6$ och slutligen $F(x)=1$ för alla $x\geq 6$.
   a. Beräkna sannolikhetsfunktionen (=den diskreta frekvensfunktionen) för X. (1p)
   b. Beräkna sannolikhetsfunktionen för $Y=|X|$, absolutbeloppet av X. (1p)

c. Beräkna sannolikheten $P(X>0)$. (1p)

6. I en linjär regressionsmodell av oberoende normalfördelade stokastiska variabler (Y) med avseende på inställningsvariabeln (**x**) antas väntevärdena på **Y**-variablerna följa det linjära sambandet $a+bx$. Varianserna för samtliga **Y**-variablerna antas vara känd och lika med **0.25**.
   a. Skatta riktningskoeffecienten **b** om du har fyra **y**-observationer: **1.5**, **2.8**, **4.1** respektive **6.0**, vid **x**-inställningarna **-1**, **2**, **5** respektive **8**. (2p)
   b. Vilken fördelning har den bakomliggande teoretiska punktskattningen som du använt i a-delen av uppgiften? (1p)
   c. Beräkna ett observerat symmetriskt konfidensintervall med konfidensgrad **95%** baserat på dina svar i b- och a-delen. (1p)
7. Du tänker undersöka om ett vattenprov innehåller för mycket arsenik för att vara tjänligt som dricksvatten. I en viss lämplig mätskala så skall arsenikhalten inte överstiga värdet **3.5** enheter. Du delar vätskeprovet i **5** lika stora delar och genomför oberoende analyser av varje del som resulterar i **5** mätvärden med observerat medelvärde lika med **2.3** och med en observerad stickvarians som är **1.21** . Du kan anta att variablerna är genererade av normalfördelade stokastiska variabler. Genomför ett lämpligt t-test av nollhypotesen att arsenikhaltens väntevärde i de **5** mätningarna är minst **3.5** . Testet skall ha signifikansnivå **1%** . (3p)
8. Empiriska fördelningen betämd av ett observerat stickprov med **n** stokastiska variabler $x_1,x_2,\ldots,x_n$ är den sannolikhetsfördelning som man får om man med sannolikheten **1/n** väljer var och en av observationerna $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

   a. Vilken fördelningsfunktion får den empiriska fördelningen? (1p)
   b. Vilket väntevärde och vilken varians får den empiriska fördelningen? (1p)
   c. Visa att variansen i den empiriska fördelningen som punktskattare (teoretisk punktskattning) inte är en väntevärdesriktig punktskattning av den underliggande teoretiska fördelningens varians. (1p)

Lycka Till!